Devoir 1

(à remettre au plus tard le 10 février, à 16h00)
(dans la chute du département d'informatique, située au PK-4150)

Le devoir doit être rédigé **individuellement** et à l'**ordinateur**. Vous devez **justifier** chacune de vos réponses. La démarche ainsi que l'utilisation correcte de la notation mathématique seront évaluées. Tout retard entraînera une pénalité de **20%** par jour (incluant les jours de la fin de semaine).

Question	1	2	3	4	Total
Sur	20	20	30	30	100
Note					

1. (20 points) Pour chacune des expressions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse. Dans tous les cas, justifiez votre réponse.
   (a) (5 points) $\log(n!) \in \Omega(n \log n)$;
   (b) (5 points) $n3^{2n} \in \omega(9^{n-4})$;
   (c) (5 points) $\sum_{i=1}^{n} i^2 \in \Theta(n^3)$;
   (d) (5 points) $\log^* n \in \mathcal{O}(1)$, où $\log^*$ est le logarithme itéré.

2. (20 points) Donnez un algorithme qui affiche les sommets d'un graphe orienté G rencontrés lors d'un parcours en profondeur, en respectant les contraintes suivantes :
   - Vous n'avez pas le droit d'utiliser la récursivité.
   - Vous devez utiliser la structure de données Pile, qui respecte la spécification suivante vue en classe :

Type	Pile
Utilise	Element, Booleen
Opérations	PILEVIDE : $\emptyset \to$ Pile ESTVIDE : Pile $\to$ Booleen EMPILER : Pile $\times$ Element $\to$ Pile DEPILER : Pile $\to$ Pile TETE : Pile $\to$ Element

   - Vous devez utiliser la structure de données Graphe, qui respecte la spécification suivante :

Type	Graphe
Utilise	Sommet, Ensemble
Opérations	SOMMETS : Graphe $\to$ Ensemble SUCCESSEURS : Graphe $\times$ Sommet $\to$ Ensemble

- Vous devez utiliser la structure de données Association, qui respecte la spécification suivante :

Type	Association
Utilise	Sommet, Element
Opérations	ASSOCIATIONVIDE : $\emptyset \to$ Association SET : Association $\times$ Sommet $\times$ Element $\to$ Association GET : Association $\times$ Sommet $\to$ Element

  et qui permet de marquer des sommets avec des valeurs quelconques (booléens, entiers, chaînes de caractères, etc.). Vous pouvez supposer que chacune des opérations s'effectuent en temps constant.
- Vous pouvez supposer que l'instruction u.AFFICHER() affiche le contenu d'un sommet $u \in$ Sommet.
- Votre algorithme doit être linéaire au pire cas en temps et en espace.
- Le graphe G n'est pas nécessairement connexe.

Indiquez les complexités temporelle et spatiale de votre algorithme en utilisant la notation asymptotique.

3. (30 points) Dans cette question, nous nous intéressons à deux structures de données, nommées Arbre et Foret, qui implémentent respectivement une structure d'*arborescence* (arbre enraciné) et de *forêt enracinée*. Elles sont définies de récursivement, l'une par rapport à l'autre, de la façon suivante :

Type	Arbre
Utilise	Naturel, Booleen, Element, Foret
Opérations	ARBRE : Element $\times$ Foret $\to$ Arbre RACINE : Arbre $\to$ Element ENFANTS : Arbre $\to$ Foret NBNOEUDS : Arbre $\to$ Naturel NBFEUILLES : Arbre $\to$ Naturel

Type	Foret
Utilise	Naturel, Booleen, Element, Arbre
Opérations	FORETVIDE : $\emptyset \to$ Foret ESTVIDE : Foret $\to$ Booleen AJOUTERARBRE : Foret $\times$ Arbre $\to$ Foret NBARBRES : Foret $\to$ Naturel ARBRE : Foret $\times$ Naturel $\to$ Arbre NBNOEUDS : Foret $\to$ Naturel NBFEUILLES : Foret $\to$ Naturel

Donnez les préconditions et les axiomes qui sont cohérents avec la sémantique suivante :

(1) Les enfants d'un arbre forment une forêt.

(2) Une feuille est un arbre dont les enfants sont une forêt vide.

(3) Une forêt est une liste ordonnée d'arbres enracinés, indicée de 0 à $k-1$, où k est le nombre d'arbres dans la forêt.

(4) Lorsqu'on ajoute un arbre à une forêt, il est inséré en dernière position.

Votre ensemble d'axiomes doit être complet et non redondant.

4. Pour chacun des ensembles suivants E, calculez sa cardinalité n, donnez une fonction de hachage $h : E \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ qui est parfaite et implémentez la fonction de hachage h à l'aide de votre langage préféré parmi Python, Java, C et C++. En particulier, montrez que votre implémentation est correcte en l'illustrant sur plusieurs exemples.

   (a) (15 points) E est l'ensemble des points à coordonnées entières dans le rectangle induit par les points $(0,0)$ et (a,b), où $a, b \geq 1$ sont des entiers donnés, c'est-à-dire

   $$E = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq b\}.$$

   (b) (15 points) E est l'ensemble des palindromes de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$, où $n \geq 0$ est un nombre entier donné.