Cap. 4 : Distribuciones conocidas

Alexandre Blondin Massé

Departamento de Informática y Matematica
Université du Québec à Chicoutimi

17 de junio del 2015
Modelado de sistemas aleatorios
Ingeniería de sistemas, producción y ambiental

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

*Sea un experimento con dos resultados posibles: «**éxito**» y «**fracaso**». Sea X la variable aleatoria cuya función de probabilidad es*

$$P(X = i) = \begin{cases} p, & si\ i = 1; \\ 1 - p, & si\ i = 0. \end{cases}$$

*donde p es la probabilidad de un **éxito**. La variable X se llama **variable aleatoria de Bernoulli**.*

Esperanza y varianza de una variable de Bernoulli

- Sea X una **variable de Bernoulli** de parámetro p;
- La **esperanza de X** es

$$\begin{aligned} \mathbf{E[X]} &= 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) \\ &= P(X = 1) \\ &= \mathbf{p}. \end{aligned}$$

- La **varianza** es

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\mathbf{X}) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= E[X] - E[X]^2 \\ &= p - p^2 \\ &= \mathbf{p(1 - p)}. \end{aligned}$$

Repetición de experimentos de Bernoulli

- Se lanza una moneda 5 **veces**.
- ¿Cuál es la probabilidad que obtenemos 2 **caras**?
- **Cara** se considera un **éxito** y **cruz** un **fracaso**.
- Los $C(5,2)$ **resultados** posibles son

  $$\mathbf{FF}PPP, \mathbf{F}P\mathbf{F}PP, \mathbf{F}PP\mathbf{F}P, \mathbf{F}PPP\mathbf{F}, P\mathbf{FF}PP,$$
  $$P\mathbf{F}P\mathbf{F}P, P\mathbf{F}PP\mathbf{F}, PP\mathbf{FF}P, PP\mathbf{F}P\mathbf{F}, PPP\mathbf{FF}.$$

- La probabilidad de un **éxito** es $1/2$ y la de un **fracaso** es $1 - 1/2 = 1/2$.
- Consecuamente, la probabilidad que se obtiene 2 **caras** cuando se lanza un dado 5 **veces** es

  $$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5}{16} = \mathbf{0{,}3125}.$$

Distribución binomial (1/2)

Definición

Sea un experimento de Bernoulli con probabilidad de ***éxito*** p*. Suponemos que el experimento se repite* n ***veces****. Sea* X *la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos obtenidos entre los* n *experimentos. Dicemos que* X *es una* ***variable aleatoria binomial de parámetros*** (n, p) *y se escribe* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$*.*

Teorema

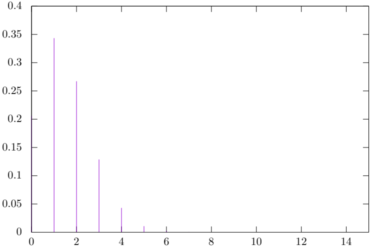
Si X *es una variable binomial de parámetros* (n, p)*, entonces la* ***función de probabilidad*** *de* X *es*

$$p(i) = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

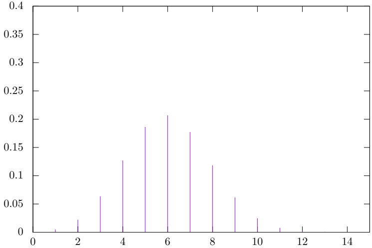
para $i = 0, 1, \ldots, n$*.*

Distribución binomial (2/2)

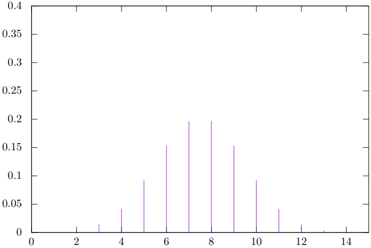
Distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.1$



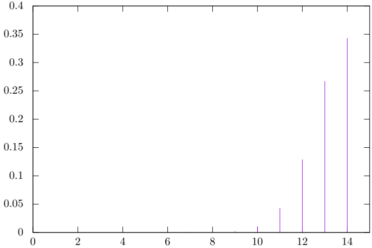
Distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.4$



Distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.5$



Distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0.9$



Ejemplo (1/2)

- Una empresa vende discos por **paquetes de** 10.
- Si 2 **discos o más** de un mismo paquete son defectuosos, el paquete es **libre**.
- Suponemos que la probabilidad que un disco sea **defectuoso** es 0,01 (de manera **independiente**).
- ¿Cuál es la probabilidad que un cliente que compra 3 **paquetes** obtenga 1 **libre**?

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$P(X \geq 2)$$

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 \\ &\approx \mathbf{0{,}00427}. \end{aligned}$$

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 \\ &\approx \mathbf{0{,}00427}. \end{aligned}$$

- Sea Y el número de paquetes **libres**.

- Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de **discos defectuosos** en un paquete dado.
- Entonces $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}01)$.
- La probabilidad que un conjunto es **libre** es

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 \\ &\approx \mathbf{0{,}00427}. \end{aligned}$$

- Sea Y el número de paquetes **libres**.
- Entonces $Y \sim \mathcal{B}(3; 0{,}00427)$, de tal manera que

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1}(0{,}00427)(0{,}99573)^2 \approx \mathbf{0{,}0127}.$$

Esperanza y varianza de una variable binomial

- Sea X una variable **aleatoria binomial**;
- Entonces
$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$
donde X_i es una **variable de Bernoulli**, para $i = 1, 2, \ldots, n$;
- Consecuamente
$$\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = p + p + \cdots + p = \mathbf{np}.$$
- También, como los X_i son independientes, tenemos
$$\mathrm{Var}[\mathbf{X}] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] = p(1-p) + \cdots + p(1-p) = \mathbf{np(1-p)}.$$

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

Definición

Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

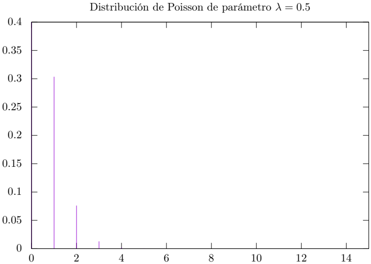
$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $\lambda > 0$ es un número real. Entonces X se llama ***variable de Poisson de parámetro λ****.*

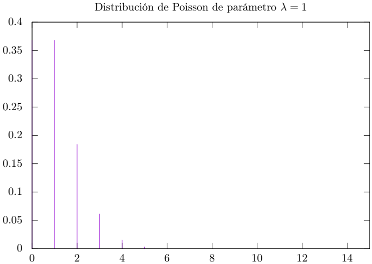
Nota

Introducida por ***Siméon Denis Poisson*** *en un libro «Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile» publicado en* ***1837****.*

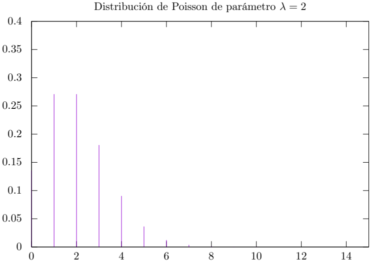
Gráficos



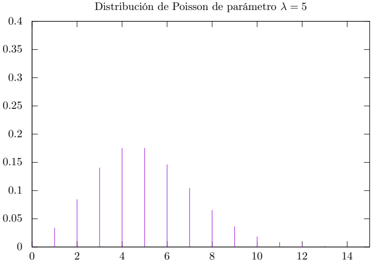
Distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0.5$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14



Distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14



Distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14



Distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14

Esperanza y varianza

Teorema

*Sea X una variable aleatoria de Poisson de **parámetro** λ. Entonces*

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}] = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \lambda.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{X}] &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{\mathbf{i}}}{\mathbf{i!}} \\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{\mathbf{i=0}}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathbf{i}}}{\mathbf{i!}} \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

*La **varianza** se obtiene de manera similar.*

Teorema

*Sea una variable **binomial** de parámetros (n, p) donde n **es grande** y p **es pequeño**. Se puede **aproximar** la variable por una variable de Poisson de parámetro $\lambda = np$.*

Hay varias situaciones en las que hay una **variable de Poisson**:

- El número de **errores** en una página de un libro;
- El número de **clientes** que entran en una tienda dentro de una hora (o un día);
- El número de **estrellas** en un determinado volumen de espacio, etc.

Ejemplos (1/3)

- Suponemos que el número **promedio de accidentes** que suceden en una parte de una carretera por semana es 3.
- ¿Cuál es la probabilidad que hay **al menos 1 accidente** esta semana?

Ejemplos (1/3)

- Suponemos que el número **promedio de accidentes** que suceden en una parte de una carretera por semana es 3.
- ¿Cuál es la probabilidad que hay **al menos** 1 **accidente** esta semana?
- Sea X el número de accidentes que suceden esta semana.

Ejemplos (1/3)

- Suponemos que el número **promedio de accidentes** que suceden en una parte de una carretera por semana es 3.
- ¿Cuál es la probabilidad que hay **al menos 1 accidente** esta semana?
- Sea X el número de accidentes que suceden esta semana.
- Suponemos que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, donde $\lambda = 3$. Entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-3} = \mathbf{0{,}9502}. \end{aligned}$$

Ejemplos (2/3)

- El número de reclamaciones tramitadas por una compañía de seguros **cada día** es 5.
- ¿Cuál es la probabilidad que haya **menos de** 3 **reclamaciones** el día siguiente?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 **reclamaciones** en 3 de los 5 días siguientes?

Ejemplos (2/3)

- El número de reclamaciones tramitadas por una compañía de seguros **cada día** es 5.
- ¿Cuál es la probabilidad que haya **menos de** 3 **reclamaciones** el día siguiente?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 **reclamaciones** en 3 de los 5 días siguientes?
- Sea X el número de reclamaciones tramitadas un día dado. Entonces $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, donde $\lambda = 5$ y

Ejemplos (2/3)

- El número de reclamaciones tramitadas por una compañía de seguros **cada día** es 5.
- ¿Cuál es la probabilidad que haya **menos de** 3 **reclamaciones** el día siguiente?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 **reclamaciones** en 3 de los 5 días siguientes?
- Sea X el número de reclamaciones tramitadas un día dado. Entonces $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, donde $\lambda = 5$ y

$$P(X \leq 3) \quad = \quad P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

- El número de reclamaciones tramitadas por una compañía de seguros **cada día** es 5.
- ¿Cuál es la probabilidad que haya **menos de 3 reclamaciones** el día siguiente?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 **reclamaciones** en 3 de los 5 días siguientes?
- Sea X el número de reclamaciones tramitadas un día dado. Entonces $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, donde $\lambda = 5$ y

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} \end{aligned}$$

- El número de reclamaciones tramitadas por una compañía de seguros **cada día** es 5.
- ¿Cuál es la probabilidad que haya **menos de 3 reclamaciones** el día siguiente?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 **reclamaciones** en 3 de los 5 días siguientes?
- Sea X el número de reclamaciones tramitadas un día dado. Entonces $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, donde $\lambda = 5$ y

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} \\ &= \frac{37}{2}e^{-5} \approx \mathbf{0{,}1247}. \end{aligned}$$

Ejemplos (3/3)

- Ahora, la probabilidad que haya 4 **reclamaciones** un día dado es
$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \approx \mathbf{0{,}1755}.$$

Ejemplos (3/3)

- Ahora, la probabilidad que haya 4 **reclamaciones** un día dado es
$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \approx \mathbf{0{,}1755}.$$
- Sea Y el número de días en los 5 siguientes que tendrán **exactamente 4 reclamaciones**.

Ejemplos (3/3)

- Ahora, la probabilidad que haya 4 **reclamaciones** un día dado es
$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \approx \mathbf{0{,}1755}.$$
- Sea Y el número de días en los 5 siguientes que tendrán **exactamente 4 reclamaciones**.
- Entonces $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ donde $n = 5$ y $p = P(X = 4)$.

- Ahora, la probabilidad que haya 4 **reclamaciones** un día dado es
$$P(X = 4) = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \approx \mathbf{0{,}1755}.$$
- Sea Y el número de días en los 5 siguientes que tendrán **exactamente** 4 **reclamaciones**.
- Entonces $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ donde $n = 5$ y $p = P(X = 4)$.
- La probabilidad buscada es
$$\binom{5}{3}(0{,}1755)^3(0{,}8245)^2 \approx \mathbf{0{,}0367}.$$

Sumas de variables de Poisson

- Sean X_1 **y** X_2 dos variables de Poisson de parámetros λ_1 **y** λ_2 respectivamente;
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independientes**;
- Entonces $X = X_1 + X_2$ es también una variable de Poisson de parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Teorema

*Si X_i es una variable de **Poisson** de parámetro λ_i para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

es una variable de Poisson de parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial
2. Distribución de Poisson
3. Distribución hipergeométrica
4. Distribución uniforme
5. Distribución normal
6. Distribución exponencial
7. Distribución conjunta
8. Covarianza

Definición

Definición

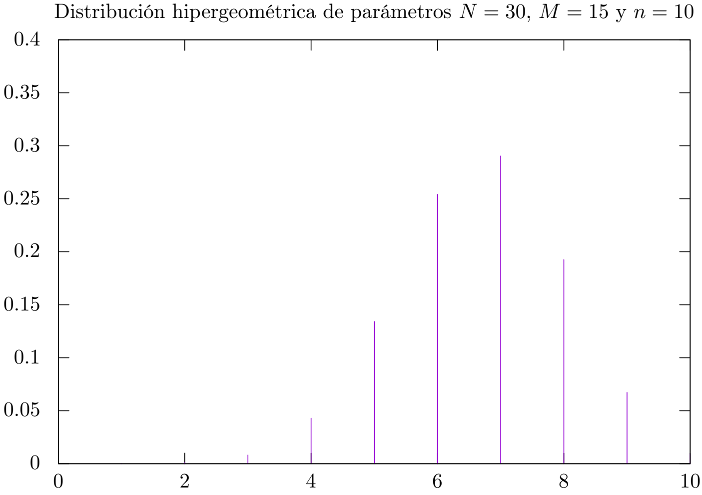
Sea una población de $M + N$ ***objetos***, *donde* M ***objetos*** *se consideran «**éxitos**» y* N ***objetos*** *se consideran «**fracasos**». Se tiran al azar* n ***objets sin reemplazo***. *Sea* X *el número de* ***éxitos*** *obtenidos.*
La variable X *se llama* ***variable hipergeométrica de parámetros*** (N, M, n).

Teorema

Sea X *una variable hipergeométrica de parámetros* (N, M, n).
La ***función de probabilidad*** *de* X *es*

$$P(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}, \quad i = 0, 1, \ldots, \text{mín}(N, n).$$

Gráfico



Distribución hipergeométrica de parámetros $N = 30$, $M = 15$ y $n = 10$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10

Ejemplo

- Un sistema consta de 6 **componentes** y funciona si 4 **de los** 6 componentes **o más** son funcionales;
- Se eligen 6 componentes entre 20 **componentes**;
- Dado que 15 **de los** 20 componentes son funcionales, ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?

Ejemplo

- Un sistema consta de 6 **componentes** y funciona si 4 **de los** 6 componentes **o más** son funcionales;
- Se eligen 6 componentes entre 20 **componentes**;
- Dado que 15 **de los** 20 componentes son funcionales, ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?
- Sea X el **número de componentes** seleccionados que **funcionan**;

Ejemplo

- Un sistema consta de 6 **componentes** y funciona si 4 **de los** 6 componentes **o más** son funcionales;
- Se eligen 6 componentes entre 20 **componentes**;
- Dado que 15 **de los** 20 componentes son funcionales, ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?
- Sea X el **número de componentes** seleccionados que **funcionan**;
- Entonces $X \sim \text{Hiper}(N, M, n)$ donde $N = 15$, $M = 5$ y $n = 6$, de tal manera que

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

Ejemplo

- Un sistema consta de 6 **componentes** y funciona si 4 **de los** 6 componentes **o más** son funcionales;
- Se eligen 6 componentes entre 20 **componentes**;
- Dado que 15 **de los** 20 componentes son funcionales, ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?
- Sea X el **número de componentes** seleccionados que **funcionan**;
- Entonces $X \sim \mathrm{Hiper}(N, M, n)$ donde $N = 15$, $M = 5$ y $n = 6$, de tal manera que

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2} + \binom{15}{5}\binom{5}{1} + \binom{15}{6}\binom{5}{0}}{\binom{20}{6}} \approx \mathbf{0{,}8687}. \end{aligned}$$

Esperanza y varianza

Teorema

Sea X una variable aleatoria hipergeométrica de parámetros (N, M, n). Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{X}] &= \frac{nN}{N+M} \\
\mathrm{Var}(\mathbf{X}) &= \frac{nNM}{(N+M)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right).
\end{aligned}
$$

Relación entre binomial y hipergeométrica

- La **esperanza** y la **varianza** de la distribución hipergeométrica son

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{nN}{N+M} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{nNM}{(N+M)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right).
\end{aligned}
$$

- Si $p = N/(N+M)$, entonces $1-p = M/(N+M)$ y

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \mathbf{np} \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbf{np(1-p)}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right).
\end{aligned}
$$

- ¿Qué pasa si $N+M \to \infty$?

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

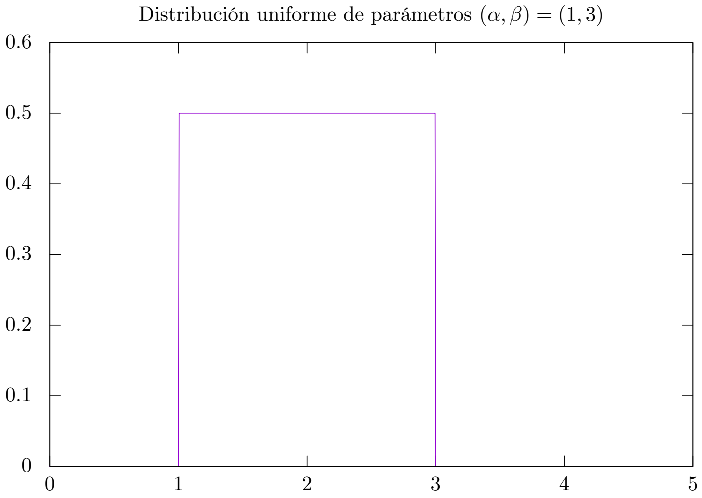
Definición

Sea X una variable aleatoria cuya ***función de densidad*** *es*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta; \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Dicemos que X es una ***variable uniforme*** *de parámetros (α, β).*

Función de densidad



Propiedades de la distribución uniforme

- Para cada intervalo $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$, tenemos

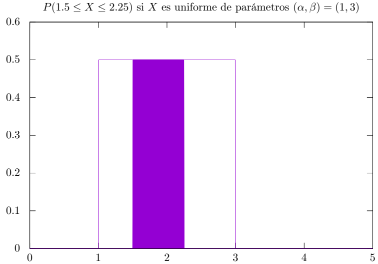
$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

- La **esperanza** de una variable uniforme X es

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

- La **varianza** de X es

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$



Ejemplo

- Sea X una variable **uniforme** de parámetros $[0, 10]$.
- Entonces

$$
\begin{aligned}
P(2 < X < 9) &= \frac{9-2}{10-0} = \mathbf{\frac{7}{10}} \\
P(1 \leq X \leq 4) &= \frac{4-1}{10-0} = \mathbf{\frac{3}{10}} \\
P(X < 5) &= \frac{5-0}{10-0} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

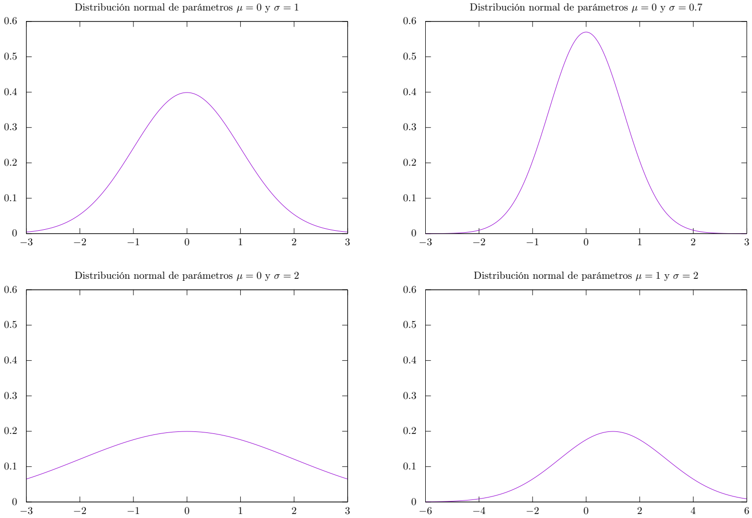
Definición

Sean μ *y* σ *dos números reales, con* $\sigma > 0$*. Se escribe* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *si* X *es una variable aleatoria cuya* ***densidad*** *es*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Se dice que X ***tiene una distribución normal (o gaussana) de parámetros*** (μ, σ^2)*.*

Función de densidad



Distribución normal en la naturaleza

- Introducida en **1733** por A. de Moivre para **approximar la distribución binomial**;
- Un hecho notable es que todo fenómeno aleatorio **converge** hacia una distribución normal (**Teorema del límite central**);
- Ejemplos donde se encuentra:
  - El **tamaño** de una persona;
  - La **velocidad** de una molécula de gas;
  - El **error** cuando se mide algo, etc.

Esperanza y varianza

Teorema

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Entonces*

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu \\ \mathrm{Var}[X] &= \boldsymbol{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Teorema

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Entonces*

1. *La variable* $Y = aX + b$ *es una variable* ***normal*** *de parámetros* $(a\mu + b, a^2\sigma^2)$*, para* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*;*
2. *La variable*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

es una variable normal de parámetros $(0, 1)$*.*

La distribución normal estándar

- Sea $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$;
- Dicemos que Z es una **variable normal estándar** (o **normalizada**);
- Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;
- Entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma};$$

- Es posible calcular todos los valores de X **en función de** Z;

Tabla de los valores de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cada entrada de la tabla corresponde a la probabilidad $P(Z \leq z)$. Por ejemplo,

$$P(Z \leq 1.47) = 0.9292,$$

que es obtenido leyendo la entrada a la intersección de la fila 1.4 y de la columna 0.07.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Ejemplo (1/2)

- Sea X una variable normal de media $\mu = 3$ y de varianza $\sigma^2 = 16$.
- Deseamos calcular (a) $P(X < 11)$ (b) $P(X > -1)$ y (c) $P(2 < X < 7)$.

Ejemplo (1/2)

- Sea X una variable normal de media $\mu = 3$ y de varianza $\sigma^2 = 16$.
- Deseamos calcular (a) $P(X < 11)$ (b) $P(X > -1)$ y (c) $P(2 < X < 7)$.
- Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(X < 11) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Z < 2) \\ &\approx \mathbf{0{,}9772}. \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$P(X > -1)$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$P(X > -1) \quad = \quad P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right)$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$P(2 < X < 7)$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$P(2 < X < 7) = P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right)$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\
&= P\left(Z > -1\right) \\
&= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}.
\end{aligned}
$$

- Finalmente,

$$
\begin{aligned}
P(2 < X < 7) &= P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) \\
&= P\left(-0{,}25 < Z < 1\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$\begin{aligned} P(2 < X < 7) &= P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) \\ &= P\left(-0{,}25 < Z < 1\right) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -0{,}25) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\
&= P\left(Z > -1\right) \\
&= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}.
\end{aligned}
$$

- Finalmente,

$$
\begin{aligned}
P(2 < X < 7) &= P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) \\
&= P\left(-0{,}25 < Z < 1\right) \\
&= P(Z < 1) - P(Z < -0{,}25) \\
&= P(Z < 1) - P(Z > 0{,}25)
\end{aligned}
$$

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$\begin{aligned} P(2 < X < 7) &= P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) \\ &= P\left(-0{,}25 < Z < 1\right) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -0{,}25) \\ &= P(Z < 1) - P(Z > 0{,}25) \\ &= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 0{,}25)) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > -1) &= P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) \\ &= P\left(Z > -1\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) \approx \mathbf{0{,}8413}. \end{aligned}$$

- Finalmente,

$$\begin{aligned} P(2 < X < 7) &= P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) \\ &= P\left(-0{,}25 < Z < 1\right) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -0{,}25) \\ &= P(Z < 1) - P(Z > 0{,}25) \\ &= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 0{,}25)) \\ &\approx 0{,}8413 + 0{,}5987 - 1 = \mathbf{0{,}4400}. \end{aligned}$$

Suma de variables normales

Teorema

*Sea X_i una **variable normal** de parámetros (μ_i, σ_i^2) para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces la variable aleatoria*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

*es una **variable normal** de parámetros (μ, σ^2), donde*

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2. \end{aligned}$$

Ejemplo (1/3)

- El "National Oceanic and Atmospheric Administration"(NOAA) tiene datos sobre la cantidad de precipitación **anual** en Los Angeles;
- Tiene una distribución **normal** de **media** $12{,}08$ y de **desviación estándar** $3{,}1$ (en pulgadas).
- ¿Cuál es la probabilidad que la cantidad total de precipitación para los 2 próximos años sea **más que** 25 **pulgadas**?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya 3 **o más pulgadas de más** el año próximo que en dos años?

Ejemplo (1/3)

- El "National Oceanic and Atmospheric Administration"(NOAA) tiene datos sobre la cantidad de precipitación **anual** en Los Angeles;
- Tiene una distribución **normal** de **media** 12,08 y de **desviación estándar** 3,1 (en pulgadas).
- ¿Cuál es la probabilidad que la cantidad total de precipitación para los 2 próximos años sea **más que** 25 **pulgadas**?
- ¿Cuál es la probabilidad que haya 3 **o más pulgadas de más** el año próximo que en dos años?
- Sean X_1 y X_2 la cantidad total de precipitación para los dos próximos años.

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independientes**.

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independientes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independientes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.
- Obtenemos

$$P(X_1 + X_2 > 25)$$

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independentes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.
- Obtenemos

$$P(X_1 + X_2 > 25) \quad = \quad P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{25 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}}\right)$$

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independientes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.
- Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > 25) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{25 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}}\right) \\ &= P(Z > 0{,}1916) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independentes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.
- Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > 25) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{25 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}}\right) \\ &= P(Z > 0{,}1916) \\ &= 1 - P(Z \leq 0{,}1916) \end{aligned}$$

Ejemplo (2/3)

- Sea $X = X_1 + X_2$.
- Suponemos que X_1 y X_2 son **independentes**.
- Entonces X es normal de media $2 \cdot 12{,}08 = \mathbf{24{,}16}$ y varianza $2 \cdot (3{,}1)^2 = \mathbf{19{,}22}$.
- Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > 25) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{25 - 24{,}16}{\sqrt{19{,}22}}\right) \\ &= P(Z > 0{,}1916) \\ &= 1 - P(Z \leq 0{,}1916) \\ &\approx 0{,}4247. \end{aligned}$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.
- Entonces

$$P(X_1 > X_2 + 3)$$

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.
- Entonces

$$P(X_1 > X_2 + 3) \quad = \quad P(X_1 - X_2 > 3)$$

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.
- Entonces

$$
\begin{aligned}
P(X_1 > X_2 + 3) &= P(X_1 - X_2 > 3) \\
&= P\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{3}{\sqrt{19{,}22}}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.
- Entonces

$$
\begin{aligned}
P(X_1 > X_2 + 3) &= P(X_1 - X_2 > 3) \\
&= P\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{3}{\sqrt{19{,}22}}\right) \\
&= P(Z > 0{,}6843)
\end{aligned}
$$

Ejemplo (3/3)

- Ahora, buscamos $P(X_1 > X_2 + 3)$.
- Notamos que $-X_2$ es una variable normal de media $-12{,}08$ y de varianza $(-1)^2(3{,}1)^2$.
- Consecuamente, $X_1 - X_2$ est normal de media 0 y de varianza $19{,}22$.
- Entonces

$$
\begin{aligned}
P(X_1 > X_2 + 3) &= P(X_1 - X_2 > 3) \\
&= P\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{19{,}22}} > \frac{3}{\sqrt{19{,}22}}\right) \\
&= P(Z > 0{,}6843) \\
&\approx \mathbf{0{,}2469}.
\end{aligned}
$$

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

Definición

Sea $\lambda > 0$ y X una variable aleatoria continua cuya densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

*Dicemos que X es una **variable exponencial de parámetro λ**.*

Teorema

*La **FDA** de una variable exponencial X de parámetro λ es*

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Esperanza y varianza

Teorema

Sea X una ***variable exponencial*** *de parámetro λ. Entonces*

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Falta de memoria

Definición

Sea X una variable aleatoria. Se dice que X ***no tiene memoria*** *si*

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \quad \textit{para todos } s, t \geq 0.$$

Teorema

Sea X una variable aleatoria ***continua****. Entonces X es exponencial si y solo si X no tiene memoria.*

Nota

La distribución exponencial es ***muy útil*** *para simular la* ***llegada*** *de personas, clientes, objetos, etc.*

Ejemplo

- Suponemos que el **número de kilométros** recorridos por un carro antes de que la batería deja de funcionar tiene une distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/10000$.
- Alguién quiere viajar en 5000km.
- ¿Cuál es la probabilidad que no tiene que cambiar su batería?

Ejemplo

- Suponemos que el **número de kilométros** recorridos por un carro antes de que la batería deja de funcionar tiene une distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/10000$.
- Alguién quiere viajar en 5000km.
- ¿Cuál es la probabilidad que no tiene que cambiar su batería?
- Sea X el número de kilométros antes de cambiar la batería.

Ejemplo

- Suponemos que el **número de kilométros** recorridos por un carro antes de que la batería deja de funcionar tiene une distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/10000$.
- Alguién quiere viajar en 5000km.
- ¿Cuál es la probabilidad que no tiene que cambiar su batería?
- Sea X el número de kilométros antes de cambiar la batería.
- Entonces $X \sim \text{Exp}(1/10000)$.

Ejemplo

- Suponemos que el **número de kilométros** recorridos por un carro antes de que la batería deja de funcionar tiene une distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/10000$.
- Alguién quiere viajar en 5000km.
- ¿Cuál es la probabilidad que no tiene que cambiar su batería?
- Sea X el número de kilométros antes de cambiar la batería.
- Entonces $X \sim \mathrm{Exp}(1/10000)$.
- Consecuamente, la probabilidad buscada es

$$P(X > 5000) = 1 - F(5) = e^{-5000\lambda} = e^{-1/2} \approx \mathbf{0{,}604}.$$

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Definición

*Sean X y Y dos variables aleatorias. La **FDA conjunta** de X y de Y es*

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

- Si conocemos la **FDA conjunta** de X y de Y, entonces se puede deducir las **FDA individuales** de X y de Y.
- De hecho,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq x, Y < \infty) \\ &= F(x, \infty). \end{aligned}$$

Definición

Sean X y Y variables discretas que pueden tomar los valores x_1, x_2, x_3, ... y y_1, y_2, y_3, ... respectivamente. La ***función de probabilidad conjunta*** *de X y de Y es*

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Ejemplo (1/2)

- Se eligen 3 **baterías** al azar en un grupo de 3 **nuevas** baterías, 4 **baterías usadas**, pero funcionales y 5 **baterías defectuosas**.
- Sean X y Y el número de baterías **nuevas** y **usadas** respectivamente.
- Entonces la función de probabilidad **conjunta** de X y de Y es

$$\begin{aligned}
p(0,0) &= \binom{5}{3}\Big/\binom{12}{3} = 10/220 \\
p(0,1) &= \binom{4}{1}\binom{5}{2}\Big/\binom{12}{3} = 40/220 \\
p(0,2) &= \binom{4}{2}\binom{5}{1}\Big/\binom{12}{3} = 30/220 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ejemplo (2/2)

- En el caso **finito**, de vez en cuando, es más fácil presentar la función de probabilidad **conjunta** con una tabla:

$i \backslash j$	0	1	2	3	$P(X = i)$
0	$10/220$	$40/220$	$30/220$	$4/220$	$84/220$
1	$30/220$	$60/220$	$18/220$	0	$108/220$
2	$15/220$	$12/220$	0	0	$27/220$
2	$1/220$	0	0	0	$1/220$
$P(Y = j)$	$56/220$	$112/220$	$48/220$	$4/220$	1

Definición

Sean X y Y variables continuas. La ***función de densidad conjunta*** *de X y de Y es la función $f(x,y)$ que satisface*

$$P((X,Y) \in C) = \iint_{(x,y)\in C} f(x,y)dxdy.$$

Densidad conjunta (1/3)

- Sean X y Y dos variables aleatorias de **densidad conjunta**

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & \text{si } x, y > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Calculen

  (a) $P(X > 1, Y < 1)$ y
  (b) $P(X < Y)$.

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$P(X > 1, Y < 1) = \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy$$

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy \\ &= 2 \left(\int_0^1 e^{-2y} dy \right) \left(\int_1^\infty e^{-x} dx \right) \end{aligned}$$

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy \\ &= 2 \left(\int_0^1 e^{-2y} dy \right) \left(\int_1^\infty e^{-x} dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{-e^{-2y}}{2} \right) \Big|_0^1 \left(-e^{-x} \right) \Big|_1^\infty \end{aligned}$$

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy \\
&= 2 \left(\int_0^1 e^{-2y} dy \right) \left(\int_1^\infty e^{-x} dx \right) \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2y}}{2} \right) \Big|_0^1 \left(-e^{-x} \right) \Big|_1^\infty \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{-1}
\end{aligned}$$

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy \\
&= 2 \left(\int_0^1 e^{-2y} dy \right) \left(\int_1^\infty e^{-x} dx \right) \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2y}}{2} \right) \Bigg|_0^1 \left(-e^{-x} \right) \Big|_1^\infty \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{-1} \\
&= (1 - e^{-2}) e^{-1}
\end{aligned}$$

Densidad conjunta (2/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y < 1) &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx \right) dy \\
&= 2 \left(\int_0^1 e^{-2y} dy \right) \left(\int_1^\infty e^{-x} dx \right) \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2y}}{2} \right) \Big|_0^1 \left(-e^{-x} \right) \Big|_1^\infty \\
&= 2 \left(\frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{-1} \\
&= (1 - e^{-2}) e^{-1} \\
&\approx 0{,}3181
\end{aligned}$$

Densidad conjunta (3/3)

Obtenemos

$$P(X < Y) = \iint_{\{(x,y) | x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy$$

Densidad conjunta (3/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \iint_{\{(x,y) \mid x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}\left(\int_0^y e^{-x}dx\right)dy \end{aligned}$$

Densidad conjunta (3/3)

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(X < Y) &= \iint_{\{(x,y) \mid x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}\left(\int_0^y e^{-x}dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-x})\Big|_0^y dy
\end{aligned}
$$

Densidad conjunta (3/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \iint_{\{(x,y)|x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}\left(\int_0^y e^{-x}dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-x})\Big|_0^y dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-y}+1)dy
\end{aligned}$$

Densidad conjunta (3/3)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \iint_{\{(x,y)|x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}\left(\int_0^y e^{-x}dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-x})\Big|_0^y dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-y}+1)dy \\
&= 2\int_0^\infty \left(e^{-2y} - e^{-3y}\right)dy
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
P(X < Y) &= \iint_{\{(x,y)|x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}\left(\int_0^y e^{-x}dx\right)dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-x})\Big|_0^y dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(-e^{-y}+1)dy \\
&= 2\int_0^\infty \left(e^{-2y}-e^{-3y}\right)dy \\
&= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Independencia

Teorema

Sean X y Y variables aleatorias. Entonces

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq x)P(Y \leq y) \\ F(x,y) &= F_X(x)F_Y(y). \end{aligned}$$

Si X y Y son ***discretas****, entonces su* ***función de probabilidad conjunta*** *y las* ***funciones de probabilidad individuales*** *satisfacen*

$$p(x,y) = P_X(x)P_Y(y), \quad \textit{para cada } x \textit{ y } y.$$

También, si X y Y son ***continuas****, entonces las* ***funciones de probabilidad*** *satisfacen*

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \textit{para cada } x \textit{ y } y.$$

Ejemplo

- Suponemos que el valor de un **acción** varia **cada día** según las probabilidades siguientes:

-3	-2	-1	0	1	2	3
0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05

- Suponemos que el cambio de valor es **independente** de un día al otro.
- Sea X_i la variable aleatoria indicando el cambio al día i.
- ¿Cuál es la probabilidades que el precio aumente de 1, de 2 y de 0 **punto** en los tres días siguientes?

Ejemplo

- Suponemos que el valor de un **acción** varia **cada día** según las probabilidades siguientes:

-3	-2	-1	0	1	2	3
0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05

- Suponemos que el cambio de valor es **independiente** de un día al otro.
- Sea X_i la variable aleatoria indicando el cambio al día i.
- ¿Cuál es la probabilidades que el precio aumente de 1, de 2 y de 0 **punto** en los tres días siguientes?
- Obtenemos

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0)$$

Ejemplo

- Suponemos que el valor de un **acción** varia **cada día** según las probabilidades siguientes:

-3	-2	-1	0	1	2	3
0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05

- Suponemos que el cambio de valor es **independente** de un día al otro.
- Sea X_i la variable aleatoria indicando el cambio al día i.
- ¿Cuál es la probabilidades que el precio aumente de 1, de 2 y de 0 **punto** en los tres días siguientes?
- Obtenemos

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0) \quad = \quad P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)P(X_3 = 0)$$

Ejemplo

- Suponemos que el valor de un **acción** varia **cada día** según las probabilidades siguientes:

-3	-2	-1	0	1	2	3
0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05

- Suponemos que el cambio de valor es **independente** de un día al otro.
- Sea X_i la variable aleatoria indicando el cambio al día i.
- ¿Cuál es la probabilidades que el precio aumente de 1, de 2 y de 0 **punto** en los tres días siguientes?
- Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)P(X_3 = 0) \\ &= 0{,}20 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}30 \end{aligned}$$

Ejemplo

- Suponemos que el valor de un **acción** varia **cada día** según las probabilidades siguientes:

-3	-2	-1	0	1	2	3
0.05	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.05

- Suponemos que el cambio de valor es **independente** de un día al otro.
- Sea X_i la variable aleatoria indicando el cambio al día i.
- ¿Cuál es la probabilidades que el precio aumente de 1, de 2 y de 0 **punto** en los tres días siguientes?
- Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2)P(X_3 = 0) \\ &= 0{,}20 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}30 \\ &= 0{,}006. \end{aligned}$$

Tabla de contenidos

1. Distribución de Bernoulli y binomial

2. Distribución de Poisson

3. Distribución hipergeométrica

4. Distribución uniforme

5. Distribución normal

6. Distribución exponencial

7. Distribución conjunta

8. Covarianza

Contexto

- Como para la **esperanza**, deseamos tener la **igualdad**

$$\mathrm{Var}(X+Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

- Es fácil ver que **no es el caso**. Por ejemplo,

$$\mathrm{Var}(X+X) \quad = \quad \mathrm{Var}(2X)$$

Contexto

- Como para la **esperanza**, deseamos tener la **igualdad**

$$\mathrm{Var}(X+Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

- Es fácil ver que **no es el caso**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+X) &= \mathrm{Var}(2X)\\ &= 2^2\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

Contexto

- Como para la **esperanza**, deseamos tener la **igualdad**

$$\mathrm{Var}(X+Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

- Es fácil ver que **no es el caso**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X+X) &= \mathrm{Var}(2X) \\ &= 2^2\mathrm{Var}(X) \\ &= 4\mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

Contexto

- Como para la **esperanza**, deseamos tener la **igualdad**

$$\mathrm{Var}(X+Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

- Es fácil ver que **no es el caso**. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}(X+X) & = & \mathrm{Var}(2X) \\ & = & 2^2\mathrm{Var}(X) \\ & = & 4\mathrm{Var}(X) \\ & \neq & \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X) \end{array}$$

- Vamos a ver que la igualdad se satisface si X y Y son **independentes**.

Covarianza

Definición

Sean X y Y variables aleatorias de esperanza μ_X ***y*** μ_Y*. La* ***covarianza*** *de X y de Y, es*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)].$$

Teorema

Sean X y Y dos variables aleatorias. Entonces

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Propiedades de la covarianza

Las propiedades siguientes son muy útiles:

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;
2. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$;
3. $\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$;
4. $\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$.

Varianza de una suma

Teorema

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, X+Y) + \mathrm{Cov}(Y, X+Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,Y) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

Independencia

Teorema

*Si X y Y son dos variables aleatorias **independientes**, entonces*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

También,

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Ejemplo

- Se lanzan 10 **dados** regulares.
- Sea X la **suma** de los dados.
- Calculen $\mathrm{Var}(X)$.

Ejemplo

- Se lanzan 10 **dados** regulares.
- Sea X la **suma** de los dados.
- Calculen $\mathrm{Var}(X)$.
- Si X_i es el resultado del dado i, entonces sabemos que $\mathrm{Var}(X_i) = 35/12$.

Ejemplo

- Se lanzan 10 **dados** regulares.
- Sea X la **suma** de los dados.
- Calculen $\mathrm{Var}(X)$.
- Si X_i es el resultado del dado i, entonces sabemos que $\mathrm{Var}(X_i) = 35/12$.
- Consecuamente,

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}(X_i) = 10 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{6} \approx \mathbf{29{,}17}.$$

Covarianza y correlación

- Sean X y Y variables aleatorias;
- Si X tiende a **aumentar** mientras que Y **aumenta**, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y)$ será **positiva**;
- Si X **aumenta** mientras que Y **disminuir**, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y)$ será **negativa**;
- La **correlación** entre X y Y es

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

- Tenemos $-1 \leq \mathrm{Corr}(X, Y) \leq 1$.